

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Диффузионные процессы и полугруппы |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 4 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.И. Богачев, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 15.05.2022

Аннотация

Курс дает введение в современную теорию диффузионных процессов и включает вероятностные и функционально-аналитические аспекты этой теории. Предполагается знакомство с основами теории случайных процессов и функционального анализа, однако напоминаются основные сведения о стохастических интегралах и стохастических уравнениях. Дается введение в теорию операторных полугрупп, обсуждаются их генераторы, рассматриваются полугруппы уравнения теплопроводности и Орнштейна – Уленбека. Изучаются полугруппы, порожденные диффузионными процессами, их свойства гиперсжимаемости и соответствующие логарифмические неравенства Соболева. Излагаются основы теории уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова и мартингаловых задач Струка – Варадана.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- дать введение в современную теорию диффузионных процессов, включая необходимый функционально-аналитический аппарат, в частности основы теории операторных полугрупп и уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова.

Задачи дисциплины

- приобретение умений и навыков для решения задач вероятностными методами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- современные проблемы стохастических дисциплин;
- аналитические и численные подходы и методы для решения прикладных задач стохастическими методами.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач математики;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- строго доказывать или опровергать утверждения.

владеть:

- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических задач, требующих для своего решения вероятностные методы.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|---|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Предварительные сведения о стохастических интегралах и стохастических дифференциальных уравнениях | 5 | 5 | | 20 |
| 2 | Непрерывные полугруппы операторов | 5 | 5 | | 20 |
| 3 | Симметричные и унитарные полугруппы | 5 | 5 | | 10 |
| 4 | Полугруппа и процесс Орнштейна – Уленбека, оператор Орнштейна – Уленбека | 5 | 5 | | 10 |
| 5 | Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова | 5 | 5 | | 10 |
| 6 | Мартингальные задачи | 5 | 5 | | 5 |
| Итого часов | | 30 | 30 | | 75 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Предварительные сведения о стохастических интегралах и стохастических дифференциальных уравнениях

Диффузионные процессы, марковское свойство.

2. Непрерывные полугруппы операторов

Примеры. Генераторы полугрупп и теорема Хилле – Йосиды.

3. Симметричные и унитарные полугруппы

Марковские и субмарковские полугруппы.

4. Полугруппа и процесс Орнштейна – Уленбека, оператор Орнштейна – Уленбека

Гиперсжимаемость и логарифмическое неравенство Соболева.

5. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова

Диффузионные полугруппы, порожденные дифференциальными операторами.

6. Мартингалльные задачи

Формула Фейнмана – Каца.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.
2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков [Текст] : учеб. пособие для вузов / под ред. А. В. Гасникова ; предисл. М. С. Ликсутова .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО, 2013 .— 427 с.
3. Модели Интернета [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 64 с.
4. Модели случайных графов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 136 с.

Дополнительная литература

1. Разработка математических моделей и методик стохастического моделирования для вероятностного анализа безопасности и надежности объектов энергетики [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Волков, Р. Т. Исламов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т), Фак. инноваций и высоких технологий .— М. : МФТИ, 2014 .— 67 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

www.mou.mipt.ru

www.mathnet.ru

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс, должен развить математическую интуицию для решения сложных, нестандартных задач вероятностными методами.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные методы доказательств теоретических задач и владеть основными приемами для решения прикладных задач.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|----------------------------|--|
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | <u>4</u> |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: В.И. Богачев, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Диффузионные процессы и полугруппы» обучающийся должен:

знать:

- современные проблемы стохастических дисциплин;
- аналитические и численные подходы и методы для решения прикладных задач стохастическими методами.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач математики;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- строго доказывать или опровергать утверждения.

владеть:

- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических задач, требующих для своего решения вероятностные методы.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Предварительные сведения о стохастических интегралах и стохастических дифференциальных уравнениях.
2. Диффузионные процессы, марковское свойство.
3. Непрерывные полугруппы операторов. Примеры.
4. Генераторы полугрупп и теорема Хилле – Йосиды.

5. Симметричные и унитарные полугруппы.
6. Марковские и субмарковские полугруппы.
7. Полугруппа и процесс Орнштейна – Уленбека, оператор Орнштейна – Уленбека.
8. Гиперсжимаемость и логарифмическое неравенство Соболева.
9. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова.
10. Диффузионные полугруппы, порожденные дифференциальными операторами.
11. Формула Фейнмана – Каца.
12. Мартингальные задачи.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Диффузионные процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений.
2. Определения непрерывной полугруппы операторов и ее генератора. Примеры. Теорема об области определения генератора и теорема Хилле – Йосиды.
3. Теорема Стоуна об унитарных полугруппах.
4. Определения марковских и субмарковских полугрупп. Теорема об интерполяции для субмарковских операторов.
5. Полугруппа Орнштейна – Уленбека и ее основные свойства.
6. Гиперсжимаемость и логарифмическое неравенство Соболева.
7. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для переходных и стационарных вероятностей диффузионных процессов.
8. Диффузионные полугруппы, порожденные дифференциальными операторами.
9. Формула Фейнмана – Каца.
10. Мартингальные задачи: определение решения и условия существования.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.